

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра прикладної математики та
моделювання складних систем

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕСУ У НЕОДНОРІДНІЙ
ДВОВИМІРНІЙ СИСТЕМІ**

Завідувач випускової

кафедри:

д.ф.-м. н., проф. О.В. Лисенко

Керівник роботи:

к.ф.-м. н., доц. А.М. Юнда

Виконавець:

студентка факультету ЕлІТ,
гр. ПМ-41
С.В.Коваль

Затверджено на засіданні кафедри "___" _____ 2018 р., протокол №

Суми – 2018

РЕФЕРАТ

Дипломна робота складається з 36 сторінок, 8 рисунків, 11 джерел.

Актуальність теми: дослідження теплових полів у системі «ріжучий інструмент - деталь» методами математичного моделювання є актуальним у зв'язку зі складністю та ресурсоемністю експериментальних досліджень.

Мета: побудувати математичну модель теплового поля у ріжучому інструменті та отримати розподіл тепла в ньому.

Метод дослідження: розв'язання поставленої задачі проводиться методом скінченних елементів, який зводить задачу до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язок СЛАР проводиться за допомогою метода Гауса.

У даній роботі побудована математична модель теплового поля методом скінченних елементів на прикладі ріжучого інструменту. Проведено аналітичні і чисельні розрахунки за результатом яких знайдено розподіл температури в перерізі ріжучого інструменту. Створено оригінальну програму для проведення чисельних розрахунків, яка здатна розв'язувати СЛАУ з великою кількістю невідомих за мінімальних системних вимог до ЕОМ. Дана робота дозволяє частково знизити витрати на проведення експериментальних досліджень при вивченні питання розподілу температури в ріжучому інструменті.

ТЕПЛОВЕ ПОЛЕ, ГРАНИЧНІ УМОВИ,
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ,
МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, СЛАУ.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД	6
1.1. Диференціальне рівняння теплопровідності	6
1.2. Початкові умови.....	7
1.3. Граничні умови.....	7
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА МЕТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ.....	9
3. АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ’ЯЗОК.....	11
4. РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ПРОГРАМИ	28
ВИСНОВОК	29
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	30
Додаток А	32

ВСТУП

Чисельне моделювання процесів теплообміну в даний час набуває великого значення тому, що для сучасної науки і техніки необхідний достовірний прогноз таких процесів. Експериментальне вивчення теплових процесів в лабораторних умовах дуже складне завдання, яке потребує багато грошових ресурсів, а в деяких випадках є просто неможливим. Чисельне моделювання процесів теплопереносу все успішніше входить в практику роботи різних науково-дослідних, проектно-конструкторських і виробничих установ.

Вже відомо, що в процесі обробки, максимальна температура генерується на поверхні ріжучого інструменту. Передача тепла при різанні є дуже складним процесом, оскільки зі збільшенням температури змінюються фізичні та механічні характеристики металевих конструкцій [1]. Температура, що діє на робочу поверхню, безпосередньо впливає на знос інструменту, обмежує застосування більш швидкісних режимів різання, тобто, обмежує максимальні умови продуктивності і строк служби інструменту.

Приблизно 85–90% тепла, що утворюється при різанні, є результатом перетворення роботи різання в теплоту. Решта роботи витрачається на деформацію кристалічної решітки. Температура у зоні різання, яка є основним фактором, що визначає процес різання, зростає завдяки збільшенню кількості підведеної теплоти. Від неї залежить сила тертя, усадка стружки, сила різання, знос інструменту.

Моделювання теплових процесів у ріжучій пластині зводиться до розв'язання диференціального рівняння теплопровідності з граничними умовами. Саме тому є важливим вибір методу чисельного розв'язку. Найпоширенішими є: метод кінцевих різниць (явна, неявна, Кранка-Нікольсона або симетрична схема), метод скінченних елементів.

1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

1.1. Диференціальне рівняння теплопровідності

Для вирішення завдань, пов'язаних з температурним полем, необхідно скласти диференціальне рівняння теплопровідності. Під диференціальним рівнянням зазвичай розуміють математичну залежність, що виражається диференціальним рівнянням між фізичними величинами, що характеризують досліджуване явище, причому ці фізичні величини є функціями простору і часу. Таке рівняння описує перебіг фізичного явища в будь-якій точці тіла в будь-який момент часу. Диференціальне рівняння теплопровідності встановлює залежність між температурою, часом та координатами елементарного об'єму. У випадку однорідного ізотропного середовища за відсутності внутрішніх джерел тепла, рівняння теплопровідності для теплового поля $T = T(x, y, t)$ має вигляд:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T, \quad x, y \in D, \quad t > 0, \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; c – теплоємність середовища; ρ – густина середовища; λ – теплопровідність середовища.

Диференціальне рівняння теплопровідності має незліченну множину рішень. Тому для знаходження єдиного рішення повинні бути задані граничні умови, тобто умови протікання процесів на поверхні тіла.

1.2. Початкові умови

Як зазначалося раніше, диференціальне рівняння теплопровідності встановлює зв'язок між часовими і просторовими змінами температури тіла; воно математично описує перенесення тепла всередині тіла. Для того щоб знайти температурне поле всередині тіла в будь-який момент часу, тобто, щоб розв'язати диференціальне рівняння, треба знати розподіл температури всередині тіла в початковий момент часу (початкова умова), геометричну форму тіла і закон взаємодії між навколишнім середовищем і поверхнею тіла (гранична умова).[2]

Сукупність початкової і граничної умов називається крайовими умовами; початкова умова називається часовою крайовою умовою, а гранична умова - просторовою крайовою умовою. Початкова умова визначається заданням закону розподілу температури всередині тіла в початковий момент часу, тобто

$$t=0: T = f(x, y, z)$$

де $f(x, y, z)$ - невідома функція.

При рівномірному розподілу температури в тілі початкова умова спрощується: $t=0: T = T_0 = const.$

1.3. Граничні умови

Граничні умови визначають особливості протікання процесу на поверхні тіла і можуть бути задані декількома способами.

1. Граничні умови першого роду - задається розподіл температури на поверхні (або кордоні) тіла для кожного моменту часу:

$$T=T_w(x,y,z,t)$$

T – температура на поверхні тіла.

Температура на поверхні постійна протягом усього процесу теплообміну. Це може бути здійснено при штучному підтриманні постійної температури або при

особливих умовах теплообміну між навколишнім середовищем і поверхнею тіла.

2. Граничні умови другого роду - задається значення теплового потоку для кожної точки поверхні (або межі) тіла в будь-який момент часу:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = q_w(x, y, z, t),$$

де \bar{n} – нормаль до поверхні тіла. Найбільш часто використовується умова $q_w = \text{const}$. Такий варіант теплообміну має місце, наприклад, при нагріванні різних виробів в високотемпературних печах.

3. Граничні умови третього роду - задається взаємозв'язок між потоком тепла за рахунок теплопровідності від твердої стінки і тепловим потоком з навколишнього середовища (закон Ньютона - Рихмана):

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = \alpha(T_w - T^e),$$

де α - коефіцієнт теплообміну.

4. Граничні умови четвертого роду - для визначення теплової взаємодії між елементами, що мають різні теплофізичні характеристики, задають умови рівності температур і теплових потоків по обидва боки від кордону розділу:

$$-\lambda_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial n} \right)_r = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_r$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА МЕТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

В даній роботі проводиться дослідження теплового поля у перерізі різця (сталь 40х) (вміст: ~0,40% вуглецю, ~1% хрому, ~0,7% марганцю, ~1% сукупний вміст інших легуючих елементів (Si, Ni, Cu, S, P), інше залізо) з твердосплавною пластиною Т15К6 (титано-вольфрамовий сплав із вмістом 15% титану та 6% кобальту, інше карбід вольфраму).

Характеристики пластини та різця

	пластина Т15К6	Різець(сталь 40х)
Густина $\rho \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	11,6	7610
Теплопровідність $\lambda \frac{\text{Вт}}{\text{МК}}$	12,6	26,7
Питома теплоємність $c \frac{\text{Дж}}{\text{ГК}}$	247	664

Таблиця 2.1

Температура навколишнього середовища $T_c = 20^\circ\text{C}$.

Змодельуємо тепловий процес, який протікає у різці (Рис.2.1).

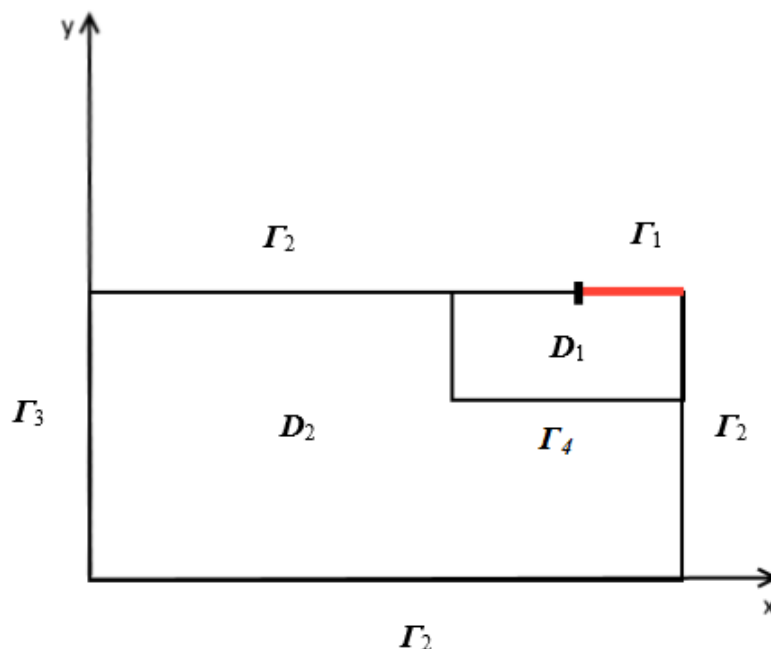


Рисунок 2.1 – Область рішення

Область рішення D розділена внутрішньою границею Γ_4 на дві підобласті D_1 (ріжуча пластина) та D_2 (державка різця). Зовнішня границя Γ , розділена на три ділянки $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. На границі Γ_1 відбувається конвективний теплообмін із нагрітою стружкою. На границі Γ_2 задані умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем (повітрям), тобто задані граничні умови 3-го роду. На границі Γ_3 задані граничні умови 1-го роду, так як там знаходиться державка різця і можна вважати температуру сталою.

Теплове поле у області рішення описується системою рівнянь теплопровідності:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial t} = h_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_1, & x, y \in D_1; \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} = h_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_2, & x, y \in D_2, \end{cases}$$

у сукупності із граничними умовами:

$$\begin{cases} t = 0, & x, y \in D : T_{1,2}(x, y, 0) = T_0; \\ t > 0, & x, y \in \Gamma_1: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{n}} = -h_1(T_1 - T_0); \\ t > 0, & x, y \in \Gamma_2: \lambda_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial \bar{n}} = -h_{1,2}(T_{1,2} - \theta); \\ t > 0, & x, y \in \Gamma_3: T_2(x, y, t) = T_0, \end{cases}$$

де \bar{n} – нормаль зовнішня до Γ , h – коефіцієнт конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, $h = \lambda/(c\rho)$, T_0 – температура зовнішнього середовища, θ – температура в зоні різання;

та умовами спряження на границі Γ_4 :

$$\begin{cases} T_1(x, y, t) = T_2(x, y, t), & x, y \in \Gamma_4; \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Gamma_4} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Gamma_4}. \end{cases}$$

Температура в зоні різання θ залежить від таких параметрів: швидкості різання v , подачі s , глибини різання t .

$$\theta = C_\theta v^{0.4} s^{0.24} t^{0.1}.$$

Формула показує, що найбільший вплив на температуру в зоні різання має швидкість різання v , в менше впливає подача s , ще в меншій мірі впливає глибина різання t , C_θ -консанта, враховуючи умови різання.

3. АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК

3.1. Метод скінченних елементів

На сьогоднішній час розроблено ряд методів моделювання для теплових процесів, серед яких метод скінченних елементів (МСЕ) має особливе місце. У нашому дослідженні розподіл температури в інструменті моделюється саме за допомогою методу скінченних елементів. Метод скінченних елементів має за основу ідеї апроксимації безперервної функції дискретною моделлю, яка будується на безлічі кусково-неперервних функцій, визначених на скінченному числі підобластей, які називаються елементами. В якості функції елемента найчастіше застосовується поліном. Порядок полінома залежить від числа використовуваних в кожному вузлі елемента даних про безперервну функцію. Користуючись методом скінченних елементів, ми, як і в методі скінченних різниць (МСР) [3], приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Однак при МСЕ число цих рівнянь (і відповідно число невідомих) може бути значно меншим, ніж при МСР, оскільки елементам, на які розбивається тверде тіло, можна надавати різні розміри (менші в одній області, великі – в іншій), що скорочує загальне їх число. МСЕ дозволяє враховувати різні властивості матеріалу для різних елементів (в тому числі і для складених тіл). Також цей метод дає можливість розбиття твердого тіла на елементи не тільки різного розміру, але і різної конфігурації. Для двовимірних задач це можуть бути трикутники, прямокутники, багатокутники, для тривимірних задач – тетраедри, паралелепіпеди, призми. Набір універсальних скінченних елементів дозволяє описувати форму тіл з великим ступенем наближення до реальної їх конфігурації. Як приклад на Рис. 3.1 показано розбиття на елементи двох різних конструкційних деталей. Видно, що скінченні елементи мають дрібніші розміри поблизу важливих ділянок деталей. Розміри і конфігурація елементів змінюються одночасно з віддаленням від найбільш важливих ділянок.

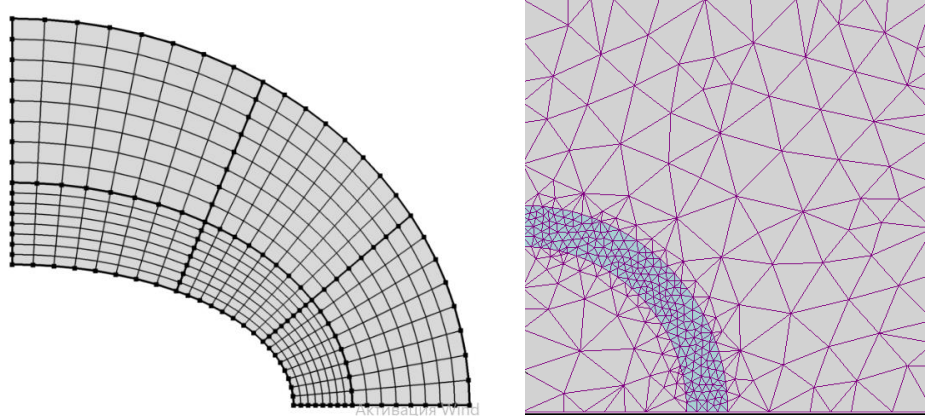


Рисунок 3.1 – Приклад розбиття на елементи конструкційних деталей.

Отже, МСЕ має ряд перевага, які допомагають отримати більш точні розрахунки в місцях великої зміни температури і зменшити час на обчислення поставленої задачі за рахунок зменшення точності обчислень в місцях малих змін.

Диференціальне рівняння для розповсюдження тепла міститься в загальному рівнянні

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (2)$$

з граничними умовами

$$T = T_0 \text{ на } S_1 \quad (3)$$

і (або)

$$\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} l_x + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} l_y + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} l_z + q + h(T - T_\infty) = 0 \quad (4)$$

на S_2 . Об'єднання S_1 і S_2 утворює повну границю елемента. Коефіцієнти λ_{xx} , λ_{yy} і λ_{zz} , а також величина q можуть бути функціями x , y і z , але передбачаються незалежними від T . Величини l_x , l_y і l_z у формулі (4) – напрямні косинуси вектора нормалі до поверхні.

Рівняння (2) разом з граничними умовами описує поширення тепла в тривимірній області. В цьому випадку λ_{xx} , λ_{yy} і λ_{zz} відповідають коефіцієнтам теплопровідності, Q – внутрішнє джерело тепла або стік, q – тепловий потік на частини поверхні і h – коефіцієнт теплообміну.

Функція поля T визначає температуру тіла. Рівняння для двовимірного випадку поширення тепла може бути отримано з формули (2) з урахуванням того, що $\partial T / \partial z = 0$. Якщо на тій частині границі, де T не визначене (на S_2), обидві величини q і h дорівнюють нулю, рівність (4) зводиться до наступної умови:

$$\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} l_x + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} l_y + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} l_z = 0, \quad (5)$$

яка відображає відсутність перенесення тепла (теплоізована межа).

Один з методів вирішення задач теплопровідності полягає у варіаційному підході. На основі переходу від крайових диференціальних задач до варіаційних розвинуто багато наближених аналітичних методів розв'язку задач теплопровідності [9, 10, 11]. Можливість варіаційного формулювання задачі визначення температурного поля обумовлено властивостями диференційного оператора рівняння теплопровідності [11]. Отже, з варіаційної точки зору рішення рівняння (2) з граничними умовами (3) і (4) еквівалентно знаходженню мінімуму функціоналу

$$\begin{aligned} \chi = \int_V \frac{1}{2} \left[\lambda_{xx} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{yy} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \lambda_{zz} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2QT \right] dV \\ + \int_S \left[qT + \frac{1}{2} h(T - T_\infty)^2 \right] dS. \end{aligned} \quad (6)$$

Рівняння (6) слугує відправною точкою для визначення температури в кожному вузлі. Ми мінімізуємо функціонал (6) використовуючи множину функцій елементів, кожна з яких визначена на окремому елементі і виражена через вузлові значення. Цей підхід дозволяє вибрати характеристики елементів, найбільш прийнятні для кожної конкретної задачі.

Почнемо процес мінімізації з перетворення функціоналу (6). Цей крок дещо спрощують наступні операції. Введемо дві матриці:

$$\mathbf{g}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Співвідношення (6) може бути тепер записано у вигляді

$$\begin{aligned} \chi = \int_V \frac{1}{2} [\mathbf{g}^T \mathbf{D} \mathbf{g} - 2TQ] dV \\ + \int_{S_1} Tq dS + \int_{S_1} \frac{h}{2} [T^2 - 2TT_\infty + T_\infty^2] dS. \end{aligned} \quad (9)$$

Згадуючи, що функції від T не являються неперервними на всій області, замість них введемо до розгляду функції $T^{(e)}$ визначені на окремих елементах. Інтеграли в (9) повинні бути розбиті на інтеграли за окремими елементами, що дає

$$\begin{aligned} \chi = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{g}^{(e)} dV - \int_{V^{(e)}} T^{(e)} Q^{(e)} dV + \\ + \int_{S_1^{(e)}} T^{(e)} q^{(e)} dS + \int_{S_1^{(e)}} \frac{h^{(e)}}{2} [T^{(e)} T^{(e)} - 2T^{(e)} T_\infty + T_\infty^2] dS, \end{aligned} \quad (10)$$

де E – загальне число елементів. Останнє співвідношення може бути записано як

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \dots + \chi^{(E)} = \sum_{e=1}^E \chi^{(e)}, \quad (11)$$

де $\chi^{(e)}$ – вклад окремого елемента в χ .

Для мінімізації функціоналу χ по вузловим значенням необхідно, щоб виконувалося рівність:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^E \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{T\}} = 0. \quad (12)$$

Якщо кожне з доданків в (12) дорівнюватиме нулю, то і сума буде дорівнює нулю. Тому можна окремо розрахувати складові в (12), побудувати для кожного з них систему лінійних рівнянь, а потім скласти матриці і стовпці вільних членів (векторів навантаження) і вирішити отриману систему відносно невідомих значень функції у вузлових точках.

Частинні похідні $\partial \chi^{(e)} / \partial \{T\}$ в (12) не можуть бути визначені, поки інтеграли в (10) не будуть виражені через вузлові значення $\{T\}$. Враховуючи співвідношення

$$T^{(e)} = \mathbf{N} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} & N_k^{(e)} & \dots & N_r^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ \vdots \\ T_r \end{bmatrix}, \quad (13)$$

маємо:

$$T^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T}.$$

Запишемо вираз для $\mathbf{g}^{(e)}$:

$$\mathbf{g}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_\rho^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_\rho^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_\rho^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_\rho \end{bmatrix} \quad (14)$$

або

$$\mathbf{g}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{T}, \quad (15)$$

де \mathbf{B} містить інформацію, зв'язану з похідними від функції форми. Ці величини поки не відомі, тому що функції форми ще не визначені. Використання формул (13) і (15) дозволяє записати інтеграли за елементами в (10) у вигляді

$$\begin{aligned}
\chi^{(e)} = & \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{T} dV - \int_{V^{(e)}} Q \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dV + \\
& + \int_{S_1^{(e)}} q \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dS - \\
& - \int_{S_2^{(e)}} h T_\infty \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} T_\infty^2 dS. \quad (16)
\end{aligned}$$

Величини Q , q , T_∞ і h – відомі коефіцієнти. Вони внесені під знак інтегралу, тому що можуть змінюватися всередині елемента. Розглянемо формулу (16):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{T} dV = \\
= \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{T} dV, \\
\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{V^{(e)}} Q \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dV = \int_{V^{(e)}} Q \mathbf{N}^{(e)T} dV, \\
\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_1^{(e)}} q \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dS = \int_{S_1^{(e)}} q \mathbf{N}^{(e)T} dS, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dS = \int_{S_2^{(e)}} h \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dS, \\
\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_2^{(e)}} h T_\infty \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{T} dS = \int_{S_2^{(e)}} h T_\infty \mathbf{N}^{(e)T} dS, \\
\frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} T_\infty^2 dS = 0.
\end{aligned}$$

Внесок окремого елементу $\partial\chi^{(e)}/\partial\{T\}$ в загальну суму $\partial\chi/\partial\{T\}$ дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi^{(e)}}{\partial\{T\}} = & \left(\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV + \int_{S_2^{(e)}} h \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)} dS \right) \mathbf{T} - \\ & - \int_{V^{(e)}} Q \mathbf{N}^{(e)T} dV + \int_{S_1^{(e)}} q \mathbf{N}^{(e)T} dS - \int_{S_2^{(e)}} h T_\infty \mathbf{N}^{(e)T} dS. \end{aligned} \quad (18)$$

Ця сукупність інтегралів може бути записана в коротшій формі:

$$\frac{\partial\chi^{(e)}}{\partial\{T\}} = \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{T} + \mathbf{f}^{(e)}, \quad (19)$$

де

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV + \int_{S_2^{(e)}} h \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)} dS \quad (20)$$

і

$$\mathbf{f}^{(e)} = - \int_{V^{(e)}} Q \mathbf{N}^{(e)T} dV + \int_{S_1^{(e)}} q \mathbf{N}^{(e)T} dS - \int_{S_2^{(e)}} h T_\infty \mathbf{N}^{(e)T} dS. \quad (21)$$

Остаточна система рівнянь виходить після підстановки виразу (19) в (10):

$$\frac{\partial\chi}{\partial\{T\}} = \sum_{e=1}^E (\mathbf{k}^{(e)} \mathbf{T} + \mathbf{f}^{(e)}) = 0, \quad (22)$$

або

$$\mathbf{KT} = \mathbf{F}, \quad (23)$$

де

$$K = \begin{pmatrix} \sum k_{11} & \sum k_{12} & \sum k_{13} & \cdots & \sum k_{1m} \\ \sum k_{21} & \sum k_{22} & \sum k_{23} & \cdots & \sum k_{2m} \\ \sum k_{31} & \sum k_{32} & \sum k_{33} & \cdots & \sum k_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum k_{n1} & \sum k_{n2} & \sum k_{n3} & \cdots & \sum k_{nm} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

де n - кількість рядків, m - кількість стовпців

$$\mathbf{F} = - \sum_{e=1}^E \mathbf{f}^{(e)}. \quad (25)$$

Матрицю коефіцієнтів $[K]$ в формулі (23) зазвичай називають глобальною матрицею жорсткості.

Інтеграли в (20) визначають матрицю теплопровідності елемента $\mathbf{k}^{(e)}$, а інтеграли в (21) – вектор навантаження елемента $\mathbf{f}^{(e)}$.

Основні етапи створення дискретної моделі невідомої величини наступні:

1. У досліджуваній області задається кінцеве число точок (вузлів).
2. Значення безперервної величини в кожному вузлі вважаються невідомими, вони повинні бути визначені.
3. Досліджувана область розбивається на кінцеве число підобластей (елементів), що мають спільні точки (вузли).
4. Безперервна величина в кожному елементі апроксимується поліномом, який визначається за допомогою вузлових значень цієї величини: для кожного елемента визначається свій поліном, але його коефіцієнти підбираються так, щоб зберігалася безперервність величини на кожній границі елемента.

Враховуючи прямокутну форму досліджуваної області розіб'ємо її на однакові прямокутні елементи, як це показано на рис. 3.2. Вершини одних прямокутників не повинні знаходитися на сторонах інших прямокутників, тобто кожен елемент має по чотири вузла. Номер вузла в загальному випадку не пов'язаний з номером елемента.

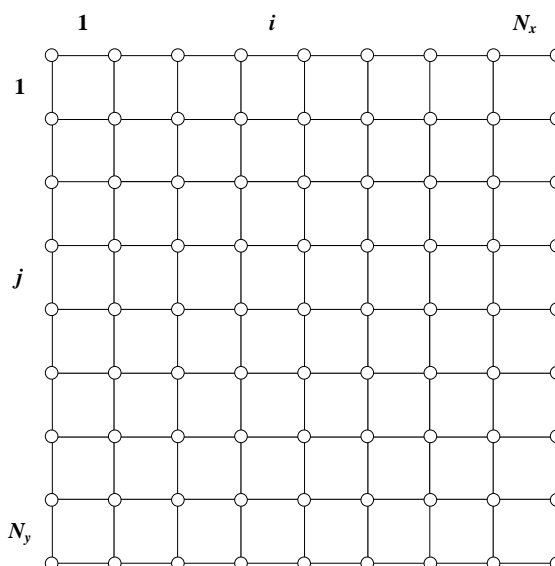


Рисунок 3.2 – Розбиття на прямокутні елементи області рішення.

Кількість рядів елементів дорівнює N_y , а кількість елементів у рядку N_x . Загальна кількість елементів визначається добутком $N_x \times N_y$. Відповідно розмір кожного елемента дорівнює $a \times b$, де $a = L_x/N_x$ – ширина елемента, а $b = L_y/N_y$ – його висота.

Розглянемо приклад з 4 елементів (див. Рис. 3.3).

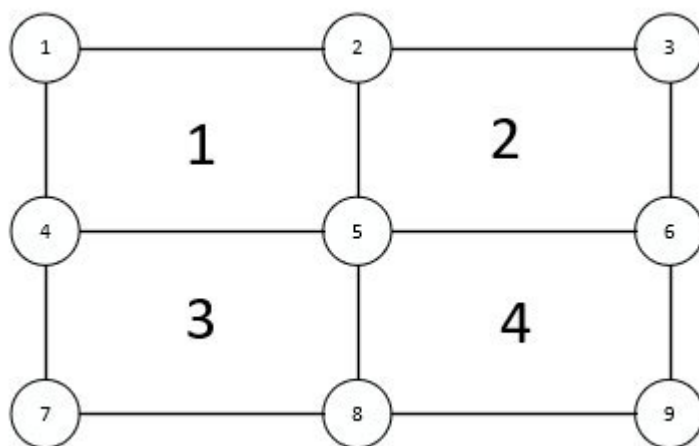


Рисунок 3.3 – Приклад з 4 елементів.

Порядок нумерації вузлів впливає на ефективність обчислень методу скінченних елементів. Реалізація МСЕ призводить до вирішення системи алгебраїчних рівнянь, велике число коефіцієнтів якої нульові. У матриці коефіцієнтів цієї системи всі ненульові коефіцієнти укладені між лініями, паралельними головній діагоналі матриці. Таким чином, при нумерації вузлів необхідно прагнути до того, щоб різниця між номерами вузлів в елементах області була як можна менша.

Відповідні розміри елемента визначаються формулами:

$$a = x_2 - x_1,$$

$$b = y_2 - y_1.$$

Площа елемента дорівнює:

$$A = ab.$$

Визначення індексів значень температур довільного чотирикутного елемента:

$$T = [T_1, T_2, T_3, T_4]$$

$$T_1 = (i - 1) * (n + 1) + j$$

$$T_2 = (i - 1) * (n + 1) + j + 1$$

$$T_3 = i * (n + 1) + j + 1$$

$$T_4 = i * (n + 1) + j$$

де i, j – номер рядка та стовпця, n – кількість елементів по осі X

Для зручності розглянемо вузлові значення температури для першого елемента.

Інтерполяційний поліном для температури двовимірного прямокутного елемента має вигляд:

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_5 y + \alpha_4 xy.$$

Підставляючи вузлові значення температур і відповідні координати вузлів отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} T_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_5 y_1 + \alpha_4 x_1 y_1; \\ T_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_5 y_2 + \alpha_4 x_1 y_2; \\ T_5 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_5 y_2 + \alpha_4 x_2 y_2; \\ T_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_5 y_1 + \alpha_4 x_2 y_1, \end{cases}$$

яку ми запишемо у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & x_1 y_2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_5 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_5 \\ T_4 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок останньої відносно невідомих коефіцієнтів має вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{T_1 x_2 y_2 - T_2 x_2 y_1 + T_5 x_1 y_1 - T_4 x_1 y_2}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} = \frac{T_1 x_2 y_2 - T_2 x_2 y_1 + T_5 x_1 y_1 - T_4 x_1 y_2}{A}, \\ \alpha_2 &= -\frac{T_1 y_2 - T_2 y_1 + T_5 y_1 - T_4 y_2}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} = -\frac{T_1 y_2 - T_2 y_1 + T_5 y_1 - T_4 y_2}{A}, \\ \alpha_5 &= -\frac{T_1 x_2 - T_2 x_2 + T_5 x_1 - T_4 x_1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} = -\frac{T_1 x_2 - T_2 x_2 + T_5 x_1 - T_4 x_1}{A}, \\ \alpha_4 &= \frac{T_1 - T_2 + T_5 - T_4}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} = \frac{T_1 - T_2 + T_5 - T_4}{A}. \end{aligned}$$

Після підстановки значень коефіцієнтів в інтерполяційний поліном отримаємо:

$$T(x, y) = \frac{1}{A} (T_1 x_2 y_2 - T_2 x_2 y_1 + T_5 x_1 y_1 - T_4 x_1 y_2 - (T_1 y_2 - T_2 y_1 + T_5 y_1 - T_4 y_2)x - (T_1 x_2 - T_2 x_2 + T_5 x_1 - T_4 x_1)y + (T_1 - T_2 + T_5 - T_4)xy).$$

Проведемо групування доданків за вузловими значеннями температури:

$$T(x, y) = \frac{1}{A} ((x_2 y_2 - y_2 x - x_2 y + xy) T_1 + (-x_2 y_1 + y_1 x + x_2 y - xy) T_2 \\ + (x_1 y_1 - y_1 x - x_1 y + xy) T_5 + (-x_1 y_2 + y_2 x + x_1 y - xy) T_4).$$

Останній вираз можна переписати у матричній формі:

$$\mathbf{T}^{(x,y)} = \mathbf{N} \mathbf{T},$$

де

$$\mathbf{N} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} (y - y_2)(x - x_2) & -(y - y_1)(x - x_2) & (y - y_1)(x - x_1) & -(y - y_2)(x - x_1) \end{bmatrix}$$

матриця форми елемента.

Визначимо інші матриці, які входять до виразів (27) і (28):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} (y - y_2) & -(y - y_1) & (y - y_1) & -(y - y_2) \\ (x - x_2) & -(x - x_2) & (x - x_1) & -(x - x_1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} (y - y_2) & (x - x_2) \\ -(y - y_1) & -(x - x_2) \\ (y - y_1) & (x - x_1) \\ -(y - y_2) & -(x - x_1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}^T = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} (y - y_2)(x - x_2) \\ -(y - y_1)(x - x_2) \\ (y - y_1)(x - x_1) \\ -(y - y_2)(x - x_1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \frac{1}{A^2} \begin{bmatrix} (y - y_2)^2(x - x_2)^2 & -(y - y_2)(y - y_1)(x - x_2)^2 & (y - y_2)(y - y_1)(x - x_2)(x - x_1) & -(y - y_2)^2(x - x_2)(x - x_1) \\ -(y - y_2)(y - y_1)(x - x_2)^2 & (y - y_1)^2(x - x_2)^2 & -(y - y_1)^2(x - x_2)(x - x_1) & (y - y_2)(y - y_1)(x - x_2)(x - x_1) \\ (y - y_2)(y - y_1)(x - x_2)(x - x_1) & -(y - y_1)^2(x - x_2)(x - x_1) & (y - y_1)^2(x - x_1)^2 & -(y - y_2)(y - y_1)(x - x_1)^2 \\ -(y - y_2)^2(x - x_2)(x - x_1) & (y - y_2)(y - y_1)(x - x_2)(x - x_1) & -(y - y_2)(y - y_1)(x - x_1)^2 & (y - y_2)^2(x - x_1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} = \frac{\lambda}{A^2} \begin{bmatrix} (y - y_2)^2 + (x - x_2)^2 & -(y - y_2)(y - y_1) - (x - x_2)^2 & (y - y_2)(y - y_1) + (x - x_2)(x - x_1) & -(y - y_2)^2 - (x - x_2)(x - x_1) \\ -(y - y_2)(y - y_1) - (x - x_2)^2 & (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 & -(y - y_1)^2 - (x - x_2)(x - x_1) & (y - y_2)(y - y_1) + (x - x_2)(x - x_1) \\ (y - y_2)(y - y_1) + (x - x_2)(x - x_1) & -(y - y_1)^2 - (x - x_2)(x - x_1) & (y - y_1)^2 + (x - x_1)^2 & -(y - y_2)(y - y_1) - (x - x_1)^2 \\ -(y - y_2)^2 - (x - x_2)(x - x_1) & (y - y_2)(y - y_1) + (x - x_2)(x - x_1) & -(y - y_2)(y - y_1) - (x - x_1)^2 & (y - y_2)^2 + (x - x_1)^2 \end{bmatrix}.$$

Далі обчислимо інтеграли, які є складовими інтегралів у (24) та (25):

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (y - y_2)^2 dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (y - y_1)^2 dx dy = \frac{1}{3} (y_2 - y_1)^3 (x_2 - x_1) = \frac{1}{3} A b^2,$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_2)^2 dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)^2 dx dy = \frac{1}{3} (x_2 - x_1)^3 (y_2 - y_1) = \frac{1}{3} A a^2,$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (y - y_2)(y - y_1) dx dy = -\frac{1}{6} (y_2 - y_1)^3 (x_2 - x_1) = -\frac{1}{6} A b^2,$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_2)(x - x_1) dx dy = -\frac{1}{6} (x_2 - x_1)^3 (y_2 - y_1) = -\frac{1}{6} A a^2,$$

$$\int_{y_1}^{y_2} (y - y_2) dy = -\frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 = -\frac{1}{2} b^2,$$

$$\int_{y_1}^{y_2} (y - y_1) dy = \frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 = \frac{1}{2} b^2,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (x - x_2) dx = -\frac{1}{2} (x_2 - x_1)^2 = -\frac{1}{2} a^2,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) dx = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} a^2.$$

Використаємо останні співвідношення для обчислення інтегралу по об'єму у (24):

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy = \frac{\lambda}{6A} \begin{bmatrix} 2(a^2 + b^2) & b^2 - 2a^2 & -(a^2 + b^2) & a^2 - 2b^2 \\ b^2 - 2a^2 & 2(a^2 + b^2) & a^2 - 2b^2 & -(a^2 + b^2) \\ -(a^2 + b^2) & a^2 - 2b^2 & 2(a^2 + b^2) & b^2 - 2a^2 \\ a^2 - 2b^2 & -(a^2 + b^2) & b^2 - 2a^2 & 2(a^2 + b^2) \end{bmatrix},$$

та інтегралів по поверхням елементу:

для лівої поверхні елементу де

$$x = x_1,$$

маємо

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{A^2} \begin{bmatrix} (y - y_2)^2 & -(y - y_2)(y - y_1) & 0 & 0 \\ -(y - y_2)(y - y_1) & (y - y_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\int_S h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = \int_{y_1}^{y_2} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy = \frac{h(x_2 - x_1)^2}{A^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(y_2 - y_1)^3 & \frac{1}{6}(y_2 - y_1)^3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6}(y_2 - y_1)^3 & \frac{1}{3}(y_2 - y_1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hb}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

для правої поверхні елементу де

$$x = x_2,$$

отримаємо

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{A^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (y - y_1)^2 & -(y - y_2)(y - y_1) \\ 0 & 0 & -(y - y_2)(y - y_1) & (y - y_2)^2 \end{bmatrix},$$

$$\int_S h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = \int_{y_1}^{y_2} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy = \frac{h(x_2 - x_1)^2}{A^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(y_2 - y_1)^3 & \frac{1}{6}(y_2 - y_1)^3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(y_2 - y_1)^3 & \frac{1}{3}(y_2 - y_1)^3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{hb}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

для верхньої поверхні елементу де

$$y = y_1,$$

отримаємо

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \frac{(y_2 - y_1)^2}{A^2} \begin{bmatrix} (x - x_2)^2 & 0 & 0 & -(x - x_2)(x - x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(x - x_2)(x - x_1) & 0 & 0 & (x - x_1)^2 \end{bmatrix},$$

$$\int_S h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = \int_{x_1}^{x_2} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy = \frac{h(y_2 - y_1)^2}{A^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^3 & 0 & 0 & \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{ha}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

для нижньої поверхні елементу де

$$y = y_2,$$

отримаємо

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \frac{(y_2 - y_1)^2}{A^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x - x_2)^2 & -(x - x_2)(x - x_1) & 0 \\ 0 & -(x - x_2)(x - x_1) & (x - x_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\int_S h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS = \int_{x_1}^{x_2} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dy = \frac{h(y_2 - y_1)^2}{A^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^3 & \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3 & \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{ha}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогічним чином обчислимо інтеграли у (25):

при

$$x = x_1,$$

отримаємо

$$\mathbf{N}^T = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} -(y - y_2)(x_2 - x_1) \\ (y - y_1)(x_2 - x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{x_2 - x_1}{A} \begin{bmatrix} -(y - y_2) \\ y - y_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\int_S h T_{\infty} \mathbf{N}^T dS = \int_{y_1}^{y_2} h T_{\infty} \mathbf{N}^T dy = \frac{h T_{\infty} (x_2 - x_1)}{A} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 \\ \frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{h T_{\infty} b}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

при

$$x = x_2,$$

отримаємо

$$\mathbf{N}^T = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (y - y_1)(x_2 - x_1) \\ -(y - y_2)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} = \frac{x_2 - x_1}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y - y_1 \\ -(y - y_2) \end{bmatrix},$$

$$\int_S h T_{\infty} \mathbf{N}^T dS = \int_{y_1}^{y_2} h T_{\infty} \mathbf{N}^T dy = \frac{h T_{\infty} (x_2 - x_1)}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 \\ \frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 \end{bmatrix} = \frac{h T_{\infty} b}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

при

$$y = y_1,$$

отримаємо

$$\mathbf{N}^T = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} -(y_2 - y_1)(x - x_2) \\ 0 \\ 0 \\ (y_2 - y_1)(x - x_1) \end{bmatrix} = \frac{y_2 - y_1}{A} \begin{bmatrix} -(x - x_2) \\ 0 \\ 0 \\ x - x_1 \end{bmatrix},$$

$$\int_S h T_{\infty} \mathbf{N}^T dS = \int_{x_1}^{x_2} h T_{\infty} \mathbf{N}^T dx = \frac{h T_{\infty} (y_2 - y_1)}{A} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (x_2 - x_1)^2 \\ \frac{1}{2} (x_2 - x_1)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{h T_{\infty} a}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

при

$$y = y_2,$$

$$\mathbf{N}^T = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ -(y_2 - y_1)(x - x_2) \\ (y_2 - y_1)(x - x_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{y_2 - y_1}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ -(x - x_2) \\ x - x_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\int_S h T_\infty \mathbf{N}^T dS = \int_{x_1}^{x_2} h T_\infty \mathbf{N}^T dx = \frac{h T_\infty (y_2 - y_1)}{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 \\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{h T_\infty a}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином ми отримали необхідні дані для чисельних розрахунків, тобто для побудови глобальної матриці теплопровідності та глобальної матриці навантаження та розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень температури.

4. РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ПРОГРАМИ

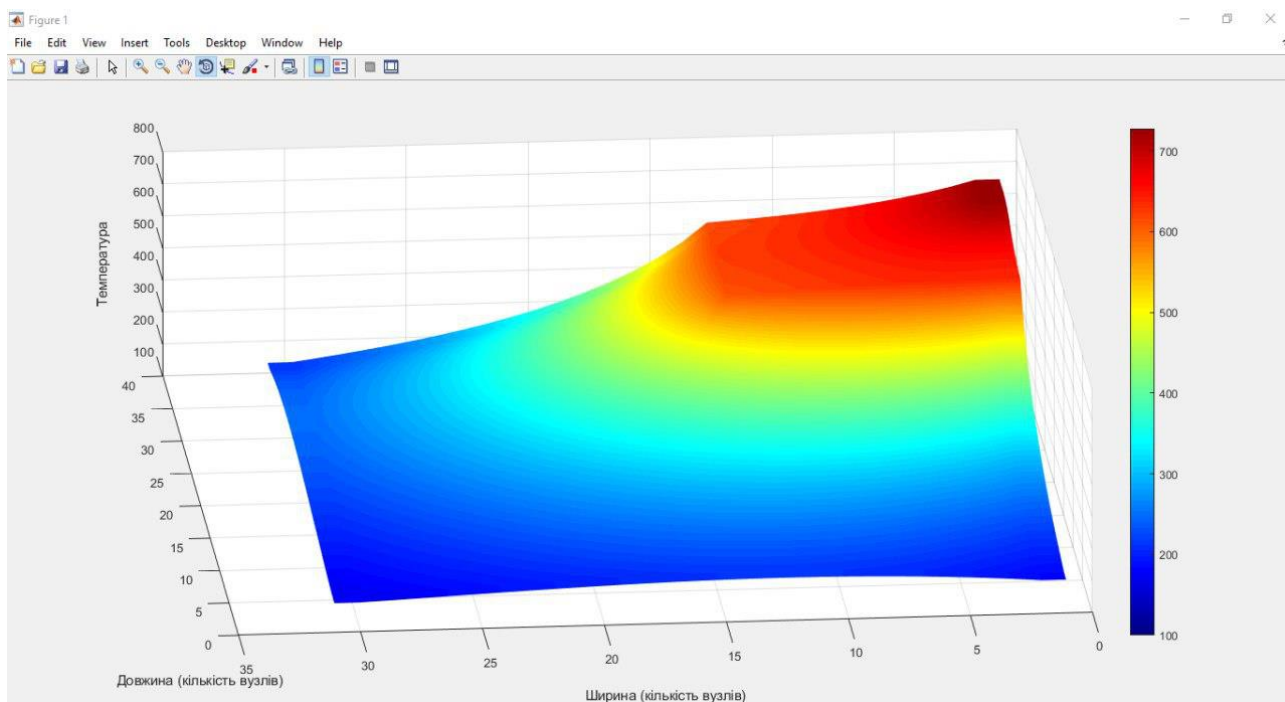


Рис. 4.1 – Результати роботи програми

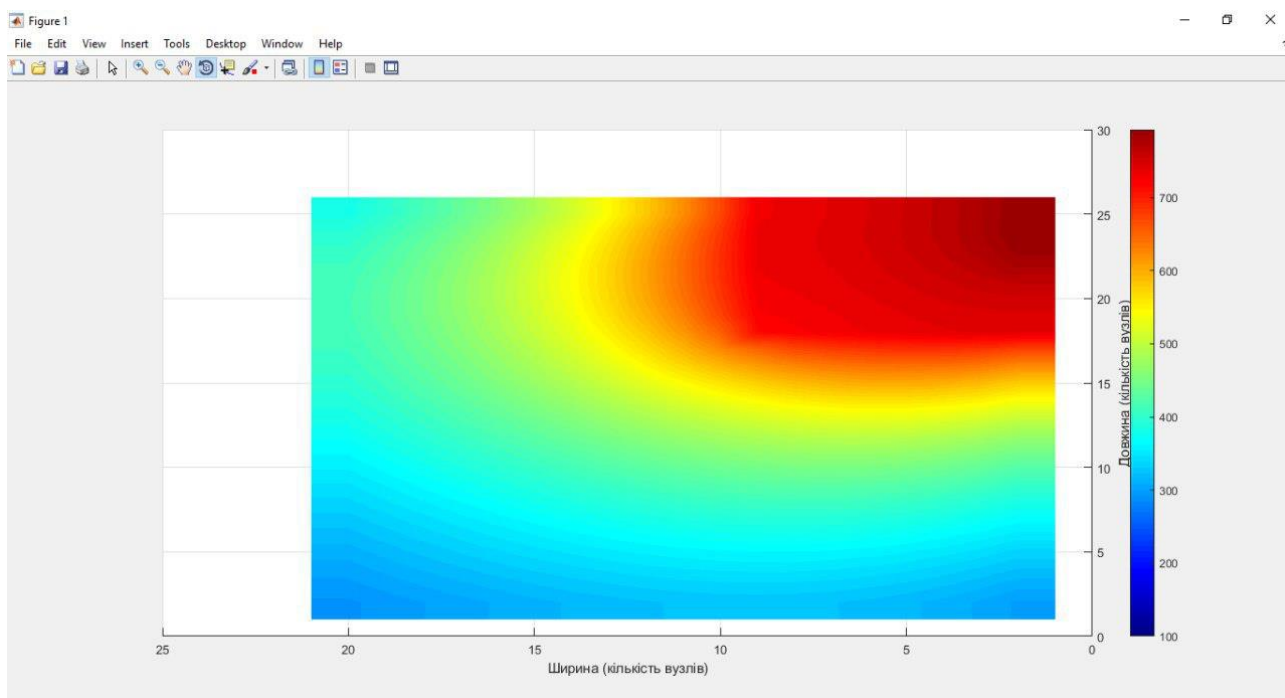


Рис. 4.2 - Результати роботи програми

ВИСНОВОК

1. У даній роботі побудована математична модель теплового поля методом скінченних елементів на прикладі ріжучого інструменту .
2. Проведено аналітичні і чисельні розрахунки за результатом яких знайдено розподіл температури в перерізі ріжучого інструменту.
3. Створено оригінальну програму для проведення чисельних розрахунків, елементи якої можуть бути використані для чисельних розрахунків при розв'язанні подібних задач.
4. Дана робота дозволяє частково знизити витрати на проведення експериментальних досліджень при вивченні питання розподілу температури в ріжучому інструменті.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A.N. Reznikov, L.A. Reznikov, *Teplovie prozessi v tehnologicheskikh sistemah* [Thermal processes in technological systems] (Moscow: Mashinostroenie: 1990) in Russian).
- [2] Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
- [3] Л. Сегерлинд (Перевод с англ. канд. физ.-мат. Наук А. А. Шестакова, под редакцией д-ра физ.-мат. Наук Б.Е. Победри). Применение метода конечных элементов; издательство «Мир», Москва 1979. – 392 с.
- [4] Gourab Chakraborty, Satyabrata Podder, Uttam Roy, *Int. J. Mech. Prod. Eng. Res. Dev.* **3**(1), 241-252 (2013).
- [5] Пискунов Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» (том II). М. Интеграл-пресс. 2002. 410с.
- [6] A. A. Goncharov, A. N. Yunda, S. A. Goncharova, D. A. Belous, S. V. Koval, L. V. Vasilyeva. The dependence of the thermal field in the cutting plate with a protective coating from the cutting modes./ *Nanomaterials: Application & Properties (NAP)*, 2017
- [7] Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. 3-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 720 с.
- [8] Gourab Chakraborty, Satyabrata Podder, Uttam Roy, *Int. J. Mech. Prod. Eng. Res. Dev.* **3**(1), 241-252 (2013).
- [9] Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. Т. 1,2. М.,1982
- [10] В.С. Зарубин. Инженерные методы решения задач теплопроводностию. М.,1983.
- [11] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа.М.,1962.

Додаток А

```

clear; clc;

%Фізичні характеристики
%Різець
lambdaCutter = 26.7;
rCutter = 7620;
cCutter = 564;
%Пластина
lambda = 12.6;
r = 11400;
c = 300;

h = lambda/(r*c);
hCutter = lambdaCutter/(rCutter* cCutter);

T0 = 20;
TCut = 800; %Температура різання

lenght = 0.06; %Довжина всієї області (в метрах)
widht = 0.05; %Ширина всієї області (в метрах)
A = lenght * widht; %Площа всієї області

%Задання положення різака відносно всієї області
%Координати точок задаються за годинниковою стрілкою
x1Cutter = 0.04;
y1Cutter = 0;

x2Cutter = 0.06;
y2Cutter = 0;

x3Cutter = 0.06;
y3Cutter = 0.02;

x4Cutter = 0.04;
y4Cutter = 0.02;

lenghtCutter = x2Cutter - x1Cutter; %Довжина різака (в метрах)
widhtCutter = y4Cutter - y1Cutter; %Ширина різака (в метрах)
ACutter = lenghtCutter * widhtCutter; %Площа різака

n = 20; %Кількість елементів по осі X
m = 20; %Кількість елементів по осі Y

%Визначення кроку
hx = lenght/n; %по осі X
hy = widht/m; %по осі Y

k = zeros(4, 4);

K = zeros((n+1)*(m+1), (n+1)*(m+1));
F = zeros((n+1)*(m+1), 1);

```



```

for i = 0:n-1
    for j = 0:m-1
        %Фактичні координати вузла
        x1 = j*hx;
        x2 = (j+1)*hx;
        y1 = i*hy;
        y2 = (i+1)*hy;

        Iv = zeros(4, 4); %Інтеграл по об'єму

        %Інтеграли по поверхням елементу
        NTNLeft = zeros(4, 4);
        NTNRight = zeros(4, 4);
        NTNUp = zeros(4, 4);
        NTNBottom = zeros(4, 4);

        NTLeft = zeros(4, 1);
        NTRight = zeros(4, 1);
        NTUp = zeros(4, 1);
        NTBBottom = zeros(4, 1);

        %Якщо елемент, що розглядається, знаходиться в області D1
        if ((x1 >= x1Cutter && x1<=x2Cutter) && (x2 >= x3Cutter &&
x2<=x3Cutter)) && ((y1 >= y1Cutter && y1<=y4Cutter) && (y2 >= y1Cutter &&
y2<=y4Cutter))

            %Інтеграл по об'єму
            Iv = Ivf(lambdaCutter, ACutter, x1, x2, y1, y2);

            %Якщо верхня поверхня елементу, знаходиться на границі області
            if y1 == 0
                NTNUp = NTNUpf(hCutter, x1, x2);

                %Якщо верхня поверхня елементу, що розглядається, знаходиться на
області Г1
                if x1 >= lenght - lenghtCutter/2

                    NTUp = NTUpf(hCutter, TCut, x1, x2);
                else
                    NTUp = NTUpf(hCutter, TCut, x1, x2);
                end
            end

            %Якщо права поверхня елементу знаходиться на границі області
            if x2 == lenght
                NTNRight = NTNRightf(hCutter, y1, y2);
                NTRight = NTRightf(hCutter, TCut, y1, y2);
            end

            %Якщо нижня поверхня елементу знаходиться на границі області
            if y2 == widht
                NTNBottom = NTNBottomf(hCutter, x1, x2);
                NTBBottom = NTBBottomf(hCutter, TCut, x1, x2);
            end

            %Якщо ліва поверхня елементу знаходиться на границі області
            if x1 == 0
                NTNLeft = NTNLeftf(hCutter, y1, y2);
                NTLeft = NTLeftf(hCutter, T0, y1, y2);
            end
        end
    end
end

```

```

%Випадок, коли елемент знаходиться в області D2
else
    %Інтеграл по об'єму
    Iv = Ivf(lambda, A, x1, x2, y1, y2);

    %Якщо верхня поверхня елемента знаходиться на границі області
    if y1 == 0
        NTNUp = NTNUpf(h, x1, x2);

        NTUp = NTUpf(h, T0, x1, x2);
    end

    %Якщо права поверхня елемента знаходиться на границі області
    if x2 == lenght
        NTNRight = NTNRightf(h, y1, y2);

        NTRight = NTRightf(h, T0, y1, y2);
    end

    %Якщо нижня поверхня елемента знаходиться на границі області
    if y2 == widht
        NTNBottom = NTNBottomf(h, x1, x2);

        NTBottom = NTBottomf(h, T0, x1, x2);
    end

    %Якщо ліва поверхня елемента знаходиться на границі області
    if x1 == 0
        NTNLeft = NTNLeftf(h, y1, y2);
        NTLeft = NTLeftf(h, T0, y1, y2);
    end
end

%Формування вектору індексів температур
j+1];
TT = [i*(n+1) + j+1, i*(n+1) + j+1+1, (i+1)*(n+1) + j+1+1, (i+1)*(n+1) +
TT2 = TT';

k = Iv + NTNLeft + NTNRight + NTNUp + NTNBottom;
f = NTLeft + NTRight + NTUp + NTBottom;

%Заповнення матриці жорсткості
for w=1:4
    for q=1:4
        K(TT2(w, 1), TT(1, q)) = K(TT2(w, 1), TT(1, q)) + k(w, q);
    end
end

%Заповнення вектору-стовпця F
for w=1:4
    F(TT2(w, 1), 1) = F(TT2(w, 1), 1) + f(w, 1);
end
end

%Вирішення системи методом Жордана-Гаусса
T = Gauss(K, F);

```

```

TLast = zeros(n+1, m+1); %Температура у вузлах

for i = 0:n-1
    for j = 0:m-1
        x1 = j*hx;
        x2 = (j+1)*hx;
        y1 = i*hy;
        y2 = (i+1)*hy;

        %Формування вектору індексів температур
        TT = [i*(n+1) + j+1, i*(n+1) + j+1+1, (i+1)*(n+1) + j+1+1, (i+1)*(n+1) +
j+1];
        TT2 = TT';

        %Визначення температури у кожній точці
        %Точка (x1, y1)
        N = Nf(A, x1, x1, x2, y1, y1, y2);
        TLast(i+1, j+1) = TLast(i+1, j+1) + N(find(N)) * T(TT(1, 1), 1);

        %Точка (x2, y1)
        N = Nf(A, x2, x1, x2, y1, y1, y2);
        TLast(i+1, j+1+1) = TLast(i+1, j+1+1) + N(find(N)) * T(TT(1, 2), 1);

        %Точка (x2, y2)
        N = Nf(A, x2, x1, x2, y2, y1, y2);
        TLast(i+1+1, j+1+1) = TLast(i+1+1, j+1+1) + N(find(N)) * T(TT(1, 3), 1);

        %Точка (x1, y2)
        N = Nf(A, x1, x1, x2, y2, y1, y2);
        TLast(i+1+1, j+1) = TLast(i+1+1, j+1) + N(find(N)) * T(TT(1, 4), 1);
    end
end

TLast(1, :) = TLast(2, :);
TLast(n, :) = TLast(n - 1, :);
TLast(:, 1) = TLast(:, 2);
TLast(:, m) = TLast(:, m - 1);

%Побудова графіку на основі значень TLast
figure;
surf(TLast);
figure;
pcolor(TLast);
shading interp;
colormap(jet(90));
caxis([min(min(TLast)) max(max(TLast))]);

```

Функція Gauss:

```
function f = Gauss(A, B)
    [n, m] = size(A);
    [w, q] = size(B);

    if n ~= m || n ~= w
        error('n != m or n != w');
    end

    %Отримання нулів під головною діагоналлю
    for i=1:n
        if A(i, i) == 0
            continue;
        end

        B(i, 1) = B(i, 1)/A(i, i);
        A(i, :) = A(i, :)./A(i, i);

        for w=i+1:n
            if A(w, i) ~= 0
                B(w, 1) = B(w, 1) - (B(i, 1).*A(w, i));
                A(w, :) = A(w, :) - (A(i, :).*A(w, i));
            end
        end
    end

    %Отримання нулів над головною діагоналлю
    for i=n:-1:1
        if A(i, i) == 0
            continue;
        end

        for w=i-1:-1:1
            if A(w, i) ~= 0
                B(w, 1) = B(w, 1) - (B(i, 1).*A(w, i));
                A(w, :) = A(w, :) - (A(i, :).*A(w, i));
            end
        end
    end

    f = B;
end
```

Функція Ivf:

```
function f = Ivf(lambda, A, x1, x2, y1, y2)
    a = x2-x1;
    b = y2-y1;

    matrix = [2*(a^2 + b^2), b^2 - 2*a^2, -(a^2 + b^2), a^2 - 2*b^2;
              b^2 - 2*a^2, 2*(a^2 + b^2), a^2 - 2*b^2, -(a^2 + b^2);
              -(a^2 + b^2), a^2 - 2*b^2, 2*(a^2 + b^2), b^2 - 2*a^2;
              a^2 - 2*b^2, -(a^2 + b^2), b^2 - 2*a^2, 2*(a^2 + b^2)];

    f = (lambda/(6*A)) * matrix;
end
```

Функція NTNUpf:

```
function f = NTNUpf(h, x1, x2)
    a = x2 - x1;
    matrix = zeros(4, 4);

    matrix(1, 1) = 2;
    matrix(4, 4) = 2;
    matrix(4, 1) = 1;
    matrix(1, 4) = 1;

    f = ((h*a)/6) * matrix;
end
```

Функція NTNRightf:

```
function f = NTNRightf(h, y1, y2)
    b = y2 - y1;
    matrix = zeros(4, 4);
    matrix(3, 3) = 2;
    matrix(4, 4) = 2;
    matrix(3, 4) = 1;
    matrix(4, 3) = 1;

    f = ((h*b)/6) * matrix;
end
```

Функція NTNBottomf:

```
function f = NTNBottomf(h, x1, x2)
    a = x2 - x1;
    matrix = zeros(4, 4);
    matrix(2, 2) = 2;
    matrix(3, 3) = 2;
    matrix(3, 2) = 1;
    matrix(2, 3) = 1;
```

```

    f = ((h*a)/6) * matrix;
end

```

Функція NTNLeftf:

```

function f = NTNLeftf(h, y1, y2)
    b = y2 - y1;
    matrix = zeros(4, 4);

    matrix(1, 1) = 2;
    matrix(2, 2) = 2;
    matrix(1, 2) = 1;
    matrix(2, 1) = 1;
    f = ((h*b)/6) * matrix;
end

```

Функція NTUpf:

```

function f = NTUpf(h, T, x1, x2)
    a = x2 - x1;
    matrix = zeros(4, 1);

    matrix(1, 1) = 1;
    matrix(4, 1) = 1;

    f = ((h*a*T)/2) * matrix;
end

```

Функція NTRightf:

```

function f = NTRightf(h, T, y1, y2)
    b = y2 - y1;
    matrix = zeros(4, 1);

    matrix(3, 1) = 1;
    matrix(4, 1) = 1;

    f = ((h*b*T)/2) * matrix;
end

```

Функція NTBottomf:

```

function f = NTBottomf(h, T, x1, x2)
    a = x2 - x1;
    matrix = zeros(4, 1);

    matrix(2, 1) = 1;
    matrix(3, 1) = 1;

    f = ((h*a*T)/2) * matrix;
end

```

Функція NTLeftf:

```
function f = NTLeftf(h, T, y1, y2)
    b = y2 - y1;
    matrix = zeros(4, 1);

    matrix(1, 1) = 1;
    matrix(2, 1) = 1;

    f = ((h*b*T)/2) * matrix;
end
```

Функція Nf:

```
function f = Nf(A, x, x1, x2, y, y1, y2)
    matrix = [(y-y2)*(x-x2), -(y-y1)*(x-x2), (y-y1)*(x-x1), -(y-y2)*(x-x1)];
    f = (1/A) * matrix;
end
```